УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

# МАТЕМАТИКА

для обучающихся первых курсов
Уральского государственного
лесотехнического университета

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский государственный лесотехнический университет»
(УГЛТУ)

# МАТЕМАТИКА

для обучающихся первых курсов
Уральского государственного
лесотехнического университета

Учебно-методическое пособие

Екатеринбург
2021

УДК 51
ББК 22.1
М34

Рецензенты:

кафедра прикладной математики УралЭНИН УрФУ Ложников А. Б., канд. физ.-мат. наук, доцент;

Пименов В. Г., заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерных наук УрФУ д-р физ.-мат. наук, профессор

Авторы : А. Ю. Вдовин, И. Н. Демидова, Л. А. Золкина,
В. М. Мухина, С. С. Рублева, С. Н. Удинцева,
Е. С. Федоровских

М 34 **Математика для обучающихся первых курсов Уральского государственного лесотехнического университета :** учебно-методическое пособие / А. Ю. Вдовин, И. Н. Демидова, Л. А. Золкина, В. М. Мухина, С. С. Рублева, С. Н. Удинцева, Е. С. Федоровских ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский государственный лесотехнический университет. – Екатеринбург : УГЛТУ, 2021. – 75 с.

ISBN 978-5-94984-779-4

Данное пособие адресовано в первую очередь первокурсникам всех направлений подготовки и соответствует принятым в вузе учебным программам и включает следующие главы: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости (I семестр), введение в математический анализ, основы дифференциального и интегрального исчислений, элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (II семестр).

Издается по решению редакционно-издательского совета Уральского государственного лесотехнического университета.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-94984-779-4

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие адресовано первокурсникам всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения Уральского государственного лесотехнического университета, изучающим дисциплину «Математика».

Его содержание соответствует принятым в вузе учебным программам и включает следующие главы: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости (I семестр), введение в математический анализ, основы дифференциального и интегрального исчислений, элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (II семестр).

Каждая из глав содержит необходимую теоретическую информацию, а также разбор примеров использования основных методов решения типовых задач с подробными разъяснениями. Тщательная самостоятельная проработка материала предлагаемого пособия позволит обучающимся овладеть необходимым минимумом теоретических знаний и практических навыков, необходимых для освоения курса математики.

Также оно может быть рекомендовано обучающимся очной формы для использования при подготовке к промежуточным и итоговым формам аттестации по дисциплине.

# I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

## 1. Линейная алгебра

### Справочный материал

#### 1. Матрицы. Основные понятия

Система из $\boldsymbol{m \cdot n}$ действительных чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов, называется ***матрицей*** размеров $\boldsymbol{m \times n}$.

Матрица записывается в виде

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, где $a_{ij}$ - элементы матрицы, $i$ - номер строки $\left(i=\overline{1,\,m}\right)$, $j$ - номер столбца $\left(j=\overline{1,\,n}\right)$.

Две матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинаковых размерностей называются ***равными***, если равны между собой все соответствующие элементы матриц, т.е. $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$ $\left(i=\overline{1,\,m},\ j=\overline{1,\,n}\right)$.

***Квадратная матрица*** – матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т.е. $m=n$.

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу размеров $n\times n$ называют матрицей $n$***- го порядка***. Элементы матрицы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ***.

***Транспонированная матрица*** к $A$ – матрица, полученная из $A$ заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером. Обозначается $A^T$.

## 2. Линейные операции над матрицами

***Сумма двух матриц*** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинаковых размеров – матрица $C_{m\times n}$, элементы которой равны суммам одноименных элементов слагаемых матриц, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

***Произведение матрицы*** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ***на число*** $\lambda$ – матрица $B_{m\times n}$, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы *A* на число $\lambda$, т.е. $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}$.

***Разность двух матриц*** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одинаковых размеров – матрица $D_{m\times n}=A-B=\left(d_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$.

## 3. Умножение матриц

***Умножение матрицы А на матрицу В*** определено, если ***число столбцов*** первой матрицы равно числу ***строк*** второй матрицы.

***Произведением матрицы А на матрицу В*** называется матрица $C_{m\times k}=A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}$, элементы которой $c_{ij}$ равны сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*, т.е.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj},\ \left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}\right).$$

## 4. Определители квадратных матриц

Обозначение определителя матрицы *A*:

$$|A|=\det A=\Delta.$$

***Определитель второго порядка*** – определитель квадратной матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, вычисляется по формуле:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель второго порядка – это число, равное разности произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали.

***Определитель третьего порядка*** – определитель квадратной матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ – это число, которое может быть вычислено по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Существуют и другие способы вычисления определителя третьего порядка.

## 5. Решение систем линейных уравнений (СЛУ)

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

где $a_{ij}$ $(i = 1,2,3;\ \ j = 1,2,3)$ – коэффициенты при неизвестных $x_j$,

$b_i$ – свободные члены в уравнениях системы.

***Решением*** системы называется такой набор чисел $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, что при их подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных $x_j$ $(\ j = 1,2,3)$ каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, она называется ***совместной***. Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

тогда СЛУ можно записать в ***матричной форме***: $A \cdot X = B$.

***Метод Крамера решения СЛУ***

Если определитель матрицы $A$ не равен нулю $(|A| \neq 0)$, то система имеет ***единственное решение***, которое можно найти по формулам ***Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_j \ (j = 1, 2, 3)$ – вспомогательные определители, получаемые из определителя $\Delta$ заменой $j$–го столбца столбцом свободных членов $B$.

**Вариант задания по теме:**

1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A^T - 2B$.

1.2. Дано: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A \cdot B$.

1.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

1.4. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

## Методические указания к решению заданного варианта

**1.1.** ***Даны матрицы*** $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ***и*** $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

***Найти матрицу*** $C=A^T-2B$.

*Решение*

Матрица $A^T$ – транспонированная и получается из матрицы $A$ заменой ее строк столбцами без изменения порядка их расположения, т.е.

$$A^T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу *2B*, умножив все элементы матрицы $B$ на число 2 : $2B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 8\end{pmatrix}$. Чтобы найти матрицу *C*, из элементов матрицы $A^T$ вычитаем соответствующие элементы матрицы *2B*:

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-4 & 0-(-4)\\ 3-2 & -1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 1 & -9\end{pmatrix}$$

**1.2.** ***Дано:*** $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 7 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. ***Найти матрицу*** $A\cdot B$.

*Решение*

Правило умножения матриц «строка на столбец»:

$$(A\cdot B)_{2\times 2}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 7+(-3)\cdot 4 & (-1)\cdot 5+(-2)\cdot 3+(-3)\cdot(-2)\\ 2\cdot 1+0\cdot 7+4\cdot 4 & 2\cdot 5+0\cdot 3+4\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1-14-12 & -5-6+6\\ 2+0+16 & 10+0-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & -5\\ 18 & 2\end{pmatrix}.$$

**1.3.** ***Вычислить определитель*** $\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 6 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}$.

*Решение*

Определитель третьего порядка вычисляется по вышерассмотренному правилу:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) + 2 \cdot (6 \cdot 4 - 5 \cdot 0) - 1 \cdot (6 \cdot 3 - 2 \cdot 0) =$$

$$= 1 \cdot (8 - 15) + 2 \cdot (24 - 0) - 1 \cdot (18 - 0) = -7 + 48 - 18 = 23.$$

**1.4.** ***Решить систему линейных уравнений*** $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

*Решение*

Решим систему методом Крамера (возможны другие методы решения).

Формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta$ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы уравнений;

$\Delta_j \; (j = 1, 2, 3)$ – вспомогательные определители, получаемые из определителя $\Delta$ заменой $j$-го столбца столбцом свободных членов $B$.

Составляем основной определитель системы $\Delta$ из коэффициентов при неизвестных и вычисляем его.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-2 \cdot 5 - 4 \cdot (-1)) + 4 \cdot (1 \cdot 5 - 4 \cdot 3) + 3 \cdot (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3) =$$

$$= 2 \cdot (-10 + 4) + 4 \cdot (5 - 12) + 3 \cdot (-1 + 6) = -25$$

Составляем первый вспомогательный определитель $\Delta_1$: первый столбец в определителе $\Delta$ заменяем столбцом свободных членов, а остальные столбцы записываем, как в определителе $\Delta$. Вычисляем $\Delta_1$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-2\cdot5-4\cdot(-1)) + 4\cdot(3\cdot5-4\cdot2) + 3\cdot(3\cdot(-1)-(-2)\cdot2) =$$

$$= 1\cdot(-10+4) + 4\cdot(15-8) + 3\cdot(-3+4) = 25.$$

Составляем второй вспомогательный определитель $\Delta_2$: второй столбец в определителе $\Delta$ заменяем столбцом свободных членов, а остальные столбцы записываем, как в определителе $\Delta$. Вычисляем $\Delta_2$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(3\cdot5-4\cdot2) - 1\cdot(1\cdot5-4\cdot3) + 3\cdot(1\cdot2-3\cdot3) =$$
$$= 2\cdot(15-8) - 1\cdot(5-12) + 3\cdot(2-9) = 0.$$

Составляем третий вспомогательный определитель $\Delta_3$: третий столбец в определителе $\Delta$ заменяем столбцом свободных членов, а остальные столбцы записываем, как в определителе $\Delta$. Вычисляем $\Delta_3$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2\cdot2-3\cdot(-1)) + 4\cdot(1\cdot2-3\cdot3) + 1\cdot(1\cdot(-1)-(-2)\cdot3) =$$

$$= 2\cdot(-4+3) + 4\cdot(2-9) + 1\cdot(-1+6) = -25.$$

Тогда, по формулам Крамера, получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25}{-25} = -1,\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-25} = 0,\quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-25}{-25} = 1.$$

Делаем проверку:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1) - 4\cdot0 + 3\cdot1 = -2 - 0 + 3 = 1, \\ 1\cdot(-1) - 2\cdot0 + 4\cdot1 = -1 - 0 + 4 = 3, \\ 3\cdot(-1) - 1\cdot0 + 5\cdot1 = -3 - 0 + 5 = 2. \end{cases}$$

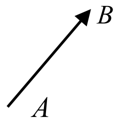
Ответ: $(-1; 0; 1)$.

# 2. Векторная алгебра

## Справочный материал

### 1. Векторы. Основные понятия

***Вектор*** – это направленный отрезок, определяющийся длиной и направлением.




Если точка $A$ – начало вектора, а точка $B$ – его конец, то вектор изображается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ .

***Длиной*** или ***модулем*** вектора $\overrightarrow{AB}$ (или $\vec{a}$ ) называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ (или $\left|\vec{a}\right|$). Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Обозначение: $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ .

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} = \vec{b}$ ) называются ***равными***, если они:
1) коллинеарны и сонаправлены; 2) имеют равные длины.

### 2. Линейные операции над векторами

***Суммой*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ или $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (рис. 2.1).

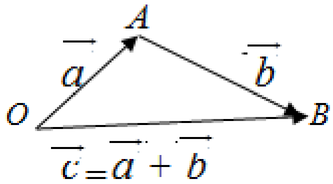



Рис. 2.1

***Разностью*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ , который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$ (рис. 2.2).

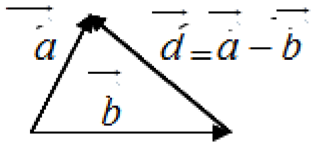



Рис. 2.2

Если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (неколлинеарных), приведенных к общему началу, построить параллелограмм, то одна диагональ (выходящая из их общего начала) является суммой векторов, другая – разностью (см. рис. 2.3).

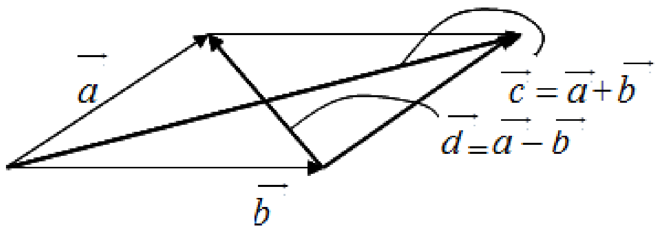



Рис. 2.3

***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** $\lambda$ $(\lambda \in R)$ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условиям: 1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; 2) длина вектора $\vec{b}$: $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\lambda > 0$ и противоположно направлены, если $\lambda < 0$.

## 3. Декартовы координаты вектора

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы попарно перпендикулярных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* образуют декартов базис. ***Координатами вектора*** $\vec{a}$ в нем называются коэффициенты при базисных векторах в представлении $\vec{a}$ их линейной комбинацией

*на плоскости*: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x; y)$, (рис. 2.4).

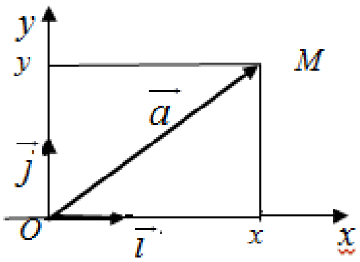



Рис. 2.4

*в пространстве*: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x; y; z)$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей координат соответственно (рис. 2.5).

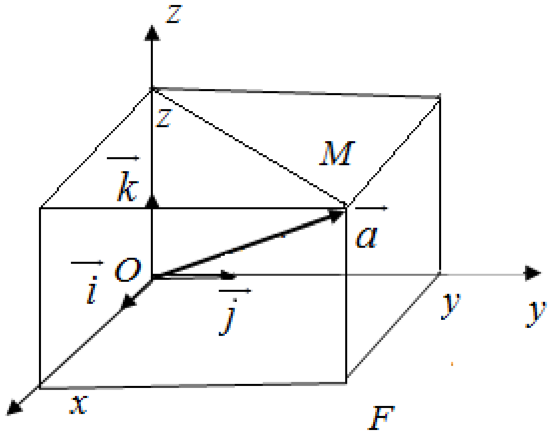



Рис. 2.5

***Координаты суммы векторов*** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

***Координаты произведения вектора*** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ***на число*** $\lambda$:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1) .$$

***Координаты вектора*** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

**4. Длина вектора** $\vec{a}$ определяется по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (на плоскости) или}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ (в пространстве).}$$

## 5. Проекция вектора на вектор

***Проекцией*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha ,$$

где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ .

## 6. Скалярное произведение векторов

***Скалярным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$$

***Скалярное произведение векторов*** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, заданных координатами, выражается формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

***Приложения скалярного произведения*:**

1) вычисление ***проекции*** вектора на вектор**:**

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|};$$

2) вычисление ***косинуса угла α*** между векторами**:**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

## 7. Векторное произведение векторов

***Векторным произведением*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах (рис.2. 6), т. е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = \boldsymbol{S} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки (*правая тройка*).

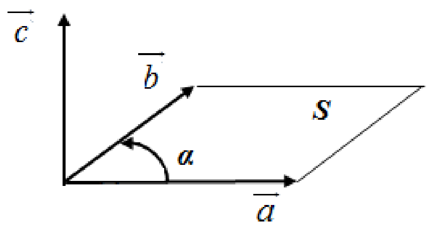



Рис. 2.6

***Векторное произведение векторов*** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, заданных координатами выражается формулой:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

***Приложения векторного произведения*** (рис. 2.7).

1) вычисление ***площади параллелограмма S*****:**

$$\boldsymbol{S} = |\vec{a} \times \vec{b}|;$$

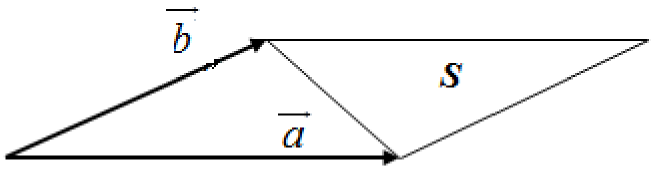



Рис. 2.7

2) вычисление ***площади треугольника*** $S_\Delta$ (см. рис. 2.7)**:**

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

## 8. Смешанное произведение

***Смешанным произведением*** трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, равное ***векторно-скалярному*** произведению $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, т. е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

***Смешанное произведение векторов*** $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, заданных координатами, можно вычислить по формуле:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ построим параллелепипед (рис. 2.8):

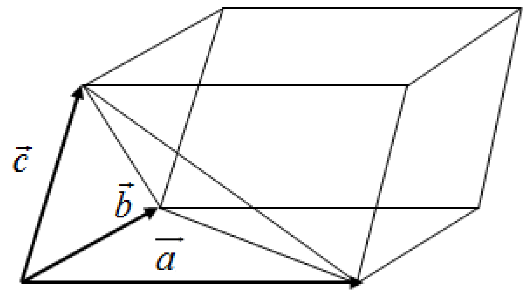



Рис. 2.8

Объем параллелепипеда $V$ равен модулю смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, т. е.

$$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|.$$

***Приложения смешанного произведения*:**

1) вычисление ***объема параллелепипеда*** $V$ (см. рис. 2.8), построенного на векторах: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|;$$

2) вычисление ***объема пирамиды*** $V_{пир}$ (см. рис. 2.8), построенной на векторах: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot V = \frac{1}{6}\cdot|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|.$$

**Вариант задания по теме**

2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(2;-3;5)$, $B(-3;7;-1)$.

2.2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, где $B(2;0;1)$, $C(-3;4;2)$. Найти вектор $2\vec{a} + \vec{b}$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2;\ 4;-1)$, $\vec{b} = (-1;\ 0;\ 4)$.

2.4. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 1$. Найти:

а) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

б) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

2.5. Найти площадь треугольника $ABC$, если $A(0;1;2)$, $B(1;3;-1)$, $C(2;-1;2)$.

2.6. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

## Методические указания к решению заданного варианта

**2.1.** ***Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если*** $A(2;-3;5)$, $B(-3;7;-1)$.

*Решение*

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного координатами точек $A(x_1;y_1;z_1)$ – начала и $B(x_2;y_2;z_2)$ – конца вектора, являются разности соответствующих координат точек $B$ и $A$, т. е.

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1).$$

Таким образом, $\overrightarrow{AB}=(-3-2;\,7-(-3);\,-1-5)=(-5;10;-6)$.

Используя формулу $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$, найдем длину вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-5)^2+10^2+(-6)^2}=\sqrt{161}.$$

**2.2.** ***Даны векторы*** $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$***, где*** $B(2;\ 0;\ 1)$, $C(-3;\ 4;\ 2)$. ***Найти вектор*** $2\vec{a}+\vec{b}$**.**

*Решение*

Находим координаты вектора $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ по координатам точек $B$ и $C$, т.е. $\vec{b}=(-3-2;\,4-0;\,2-1)=(-5;\,4;\,1)$.

Вектор $\vec{a}=(3;\,-1;\,2)$. Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то вектор $2\vec{a}=(6;\,-2;\,4)$. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, следовательно, вектор $2\vec{a}+\vec{b}=(6;\,-2;\,4)+(-5;\,4;\,1)=(1;\,2;\,5)$.

**2.3.** ***Найти скалярное произведение векторов*** $\vec{a}=(2;4;-1)$, $\vec{b}=(-1;0;4)$.

*Решение*

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, заданных своими координатами, находится по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

По условию задачи $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+4\cdot0+(-1)\cdot4=-6$.

**2.4.** ***Даны векторы*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$**,** $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sqrt{2}$**,** $|\vec{a}|=6$**,** $|\vec{b}|=1$**.**
***Найти:***
***а) угол между векторами*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$**,**
***б) проекцию вектора*** $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$**.**

*Решение*

а) Используем формулу $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$,

где $\alpha$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

По условию задачи имеем: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{6\cdot 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $\alpha = 45^\circ$.

б) Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находится по формуле

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

По условию задачи: $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{3\sqrt{2}}{1} = 3\sqrt{2}$.

**2.5.** ***Найти площадь треугольника*** $ABC$**,** ***если*** $A(0;\ 1;\ 2)$**,** $B(1;\ 3;\ -1)$**,** $C(2;\ -1;\ 2)$**.**

*Решение*

Площадь треугольника можно найти по формуле (рис. 2.9):

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|,$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы, образующие треугольник; $|\vec{a}\times\vec{b}|$ – модуль (длина) векторного произведения.

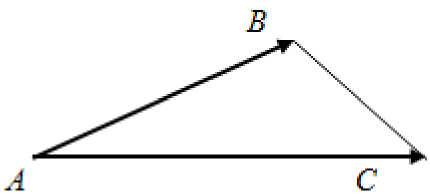



Рис. 2.9

Векторное произведение векторов $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, заданных координатами находится по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Найдем векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 2.9) :

$\vec{a}=(1-0;3-1;-1-2)=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(2-0;-1-1;2-2)=(2;-2;0)$.

Определим векторное произведение векторов:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(0-(-2)(-3)\right)-\vec{j}\left(0-2(-3)\right)+\vec{k}\left(-2-2\cdot 2\right)=-6\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}=\left(-6;-6;-6\right).$$

Длина полученного вектора $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-6)^2}=6\sqrt{3}.$

Итак, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (кв.ед.).

**2.6.** ***Найти объем пирамиды, построенной на векторах*** $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$**,** $\vec{b}=-\vec{k}$**,** $\vec{c}=\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$**.**

*Решение*

Объем пирамиды $V_{пир}$ (см. рис.2.8), построенной на векторах $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $\vec{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$, как на ребрах, равен $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами, находится по формуле: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.

По условию имеем: $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}=(2,3,0)$, $\vec{b}=-\vec{k}=(0;0;-1)$, $\vec{c}=\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}=(1;\ 4;\ 5)$. Тогда их смешанное произведение равно:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot 1+0=5.$$

Следовательно, объем пирамиды равен: $V_{пир}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}$ (куб. ед.).

# 3. Аналитическая геометрия

## Справочный материал

### Линии на плоскости. Основные понятия

Аналитическая геометрия на плоскости изучает свойства геометрических объектов средствами алгебры с помощью метода координат, предложенного французским математиком Рене Декартом.

### Прямая на плоскости

**1. Метод координат на плоскости. Простейшие задачи**

Рассмотрим некоторые задачи аналитической геометрии в прямоугольной (декартовой) системе координат на плоскости $Oxy$ (две взаимно перпендикулярных оси $Ox$ и $Oy$ с общей единицей масштаба и началом $O$).

***Расстояние между двумя точками***

Расстояние $d$ между двумя точками $A(x_1;\, y_1)$ и $B(x_2;\, y_2)$ вычисляется как длина вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1)$:

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

***Координаты точки $C(x;\, y)$, делящей отрезок с концами $A(x_1;\, y_1)$ и $B(x_2;\, y_2)$ в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$*** (рис. 3.1), находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

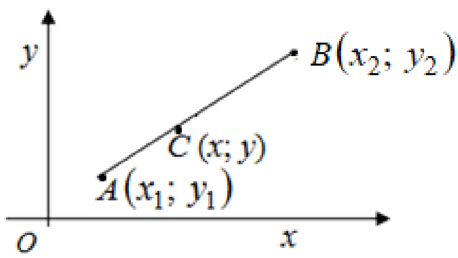



Рис 3.1

***Координаты точки C****(x; y)* – ***середины отрезка с концами*** $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ находятся по формулам (λ = 1):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

## 2. Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой в прямоугольной системе координат на плоскости будут соответствовать разные виды ее уравнений.

• ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом*****:** $y = kx + b$,
где $k = tg\,\alpha$ – ***угловой коэффициент*** прямой;
$\alpha$ – ***угол наклона*** прямой к оси $Ox$;
$b$ – ордината точки пересечения прямой с осью $Ox$ (рис. 3.2), прямая не параллельна оси $Oy$.

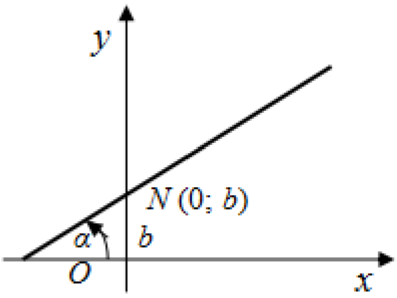



Рис 3.2

• ***Общее уравнение прямой*****:** $Ax + By + C = 0$ ( $A$, $B$, $C$ – любые действительные числа при условии, что $A$ и $B$ одновременно не равны нулю), где вектор $\vec{n} = (A; B)$ – ***нормальный вектор*** (перпендикулярный к прямой).

Если $B \neq 0$, то угловой коэффициент прямой равен

$$k = tg\,\alpha = -\frac{A}{B}.$$

• ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0; y_0)$ ***с данным угловым коэффициентом*****:** $y - y_0 = k(x - x_0)$.

• ***Уравнение прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Отсюда, угловой коэффициент прямой $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

***Замечание.*** *Уравнение прямой на плоскости – уравнение первой степени относительно переменных x и y.*

*И обратно: всякое уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет на плоскости некоторую прямую.*

**3. Угол между прямыми**

Две прямые $l_1$ и $l_2$ заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Угол $\varphi$ между прямыми можно найти, пользуясь формулой:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

***Условие параллельности прямых*:** $k_1 = k_2$.

***Условие перпендикулярности прямых*:** $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

***Точка пересечения двух прямых*** находится из решения системы уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

## Кривые второго порядка

Кривая второго порядка – линия на плоскости, задаваемая уравнением: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

***Важнейшие типы***

**1. Окружность.** ***Окружностью*** называется множество всех точек $M\,(x;\,y)$ плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой ***центром***.

Если центр окружности – точка $C(a;b)$, радиус окружности равен $R$ (рис. 3.3), то уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

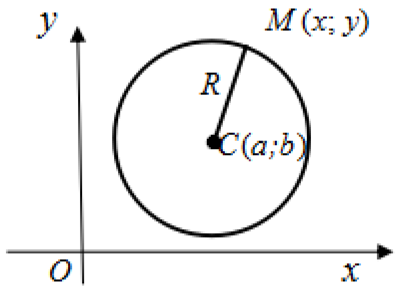



Рис. 3.3

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности принимает вид: $x^2+y^2=R^2$.

**2. Эллипс.** ***Эллипсом*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек $F_1$ и $F_2$, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная $2a>|F_1F_2|$.

***Каноническое уравнение эллипса***, если оси координат системы *Oxy* совпадают с осями симметрии эллипса (рис. 3.4), имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a$ и $b$ – полуоси эллипса, $b^2=a^2-c^2$,

$F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ – *фокусы эллипса, если* $a>b$. $|F_1F_2|=2c$.

***Эксцентриситет эллипса***: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$.

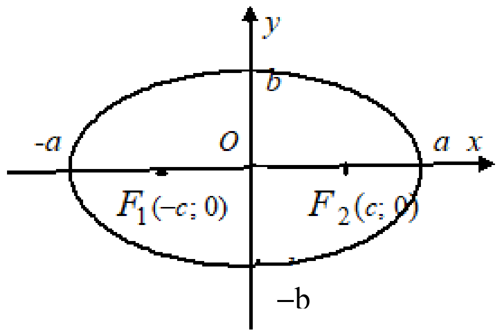



Рис. 3.4

**3. Гипербола.** ***Гиперболой*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух данных точек $F_1$ и $F_2$, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, равная $2a<|F_1F_2|$.

***Каноническое уравнение гиперболы***, если оси координат системы $Oxy$ совпадают с осями симметрии гиперболы (рис.3. 5), имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a$ – действительная полуось гиперболы,

$b$ – мнимая полуось, $c^2=a^2+b^2$.

***Эксцентриситет гиперболы***: $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$.

***Уравнения асимптот гиперболы***: $y=\pm\frac{b}{a}x$.

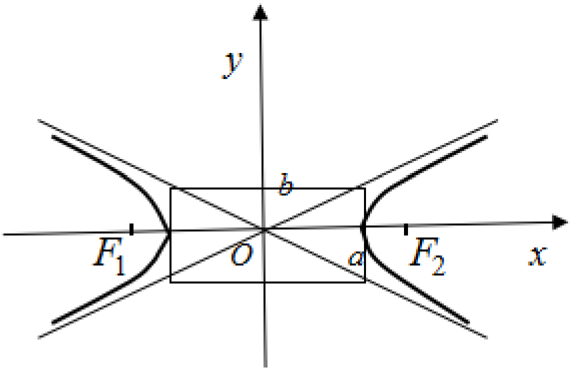



Рис. 3.5

**4. Парабола.** ***Параболой*** называется множество всех точек $M(x;y)$ плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки $F$, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы $p$.

***Каноническое уравнение параболы***

$$y^2=2px,$$

$F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ – фокус, уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$ (вершина в начале координат и ось симметрии $Ox$, (рис. 3.6):

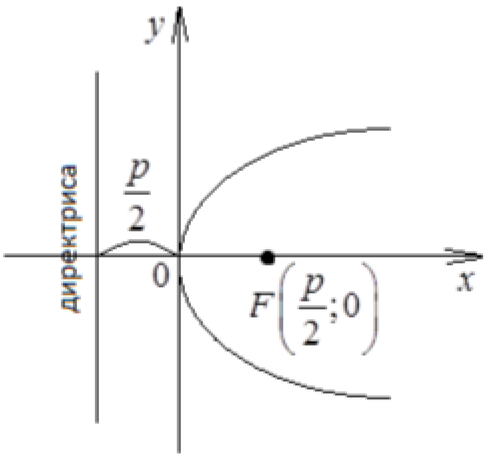



Рис 3.6

**Вариант задания по теме**

3.1. Найти уравнение медианы *CD* треугольника *ABC*, если заданы вершины треугольника: *A* (–1; –2), *B* (7; 0), *C* (2; 6).

3.2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку *A* (–3; 2) параллельно прямой $2x - y - 3 = 0$.

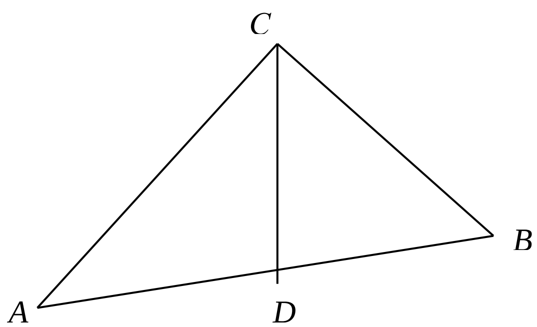
3.3. Найти уравнение окружности, проходящей через точку *A* (10; 5), с центром в точке *C* (4; –3).

3.4. Найти радиус окружности $x^2 + 10x + y^2 - 4y = 7$.

## Методические указания к решению заданного варианта

**3.1.** ***Найти уравнение медианы CD треугольника ABC, если заданы вершины треугольника:*** *A* (–1; –2), *B* (7; 0), *C* (2; 6).

*Решение*



Медиана $CD$ треугольника соединяет вершину $C$ с серединой отрезка $AB$. Координаты точки $D$ ($x_D; y_D$), как середины отрезка, можно найти по формулам:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}, \text{ где } A(x_A; y_A) \text{ и } B(x_B; y_B).$$

По условию задачи:

$$x_D = \frac{-1+7}{2} = 3, \quad y_D = \frac{-2+0}{2} = -1. \text{ Итак, } D(3; -1).$$

Используя уравнение прямой, проходящей через две точки

$$C(x_C; y_C) \text{ и } D(x_D; y_D): \quad \frac{x - x_C}{x_D - x_C} = \frac{y - y_C}{y_D - y_C},$$

получим $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-6}{-1-6}$ или $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-6}{-7}$.

Итак, уравнение медианы $CD$ имеет вид: $7x + y - 20 = 0$.

**3.2.** ***Найти уравнение прямой, проходящей через точку*** $A$ (–3; 2) ***параллельно прямой*** $2x - y - 3 = 0$.

*Решение*

Уравнение прямой, имеющей *угловой коэффициент* $\boldsymbol{k}$ и проходящей через точку $A$ ($x_0; y_0$), имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловой коэффициент прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, можно найти по формуле: $k = -\dfrac{A}{B}$ (если $B \neq 0$).

По условию задачи угловой коэффициент прямой $2x - y - 3 = 0$ $k = -\dfrac{2}{-1} = 2$, а, в силу условия параллельности, угловой коэффициент искомой прямой также равен 2, и ее уравнение имеет вид:

$y - 2 = 2(x + 3)$ или $2x - y + 8 = 0$.

**3.3.** ***Найти уравнение окружности, проходящей через точку*** $A$ (10; 5), ***с центром в точке*** $C$ (4; –3).

*Решение*

Если $R$ – радиус окружности, а точка $C(a;b)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

По условию задачи радиус $R$ равен длине вектора $\overrightarrow{CA}$ = (10 – 4; 5+3).

$R=\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{6^2+8^2}=10$ и уравнение окружности имеет вид:

$$(x-4)^2+(y+3)^2=100.$$

**3.4.** ***Найти радиус окружности*** $x^2+10x+y^2-4y=7$.

*Решение*

Выделим в уравнении окружности полные квадраты относительно переменных $x$ и $y$ следующим образом:

$$(x^2+10x+25)-25+(y^2-4y+4)-4=7 \quad \text{или} \quad (x+5)^2+(y-2)^2=36.$$

Следовательно, радиус окружности $R$ = 6.

# 4. Предел

## Справочный материал

1. **Основные понятия.** Если каждому числу $x$ из множества $X \subset R$ по некоторому закону поставлено в соответствие единственное число $y$, то говорят, что на множестве $X$ задана *функция* $y = f(x)$.

Множество $X$ называют *областью определения* функции, $x$ – независимой переменной или *аргументом*.

Число $A$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от $\varepsilon$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполнится неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ .

Число $A$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $M > 0$, что для всех значений $x$, удовлетворяющих условию $|x| > M$, выполнится неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ .

**2. Правила предельного перехода**

Если существуют: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$ , $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = B$ , то:

2.1. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C = C$, где $C$ – постоянная.

2.2. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) + g(x)) = A + B$.

2.3. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

2.4. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

2.6. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(u(x)) = f\,(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} u(x))$, если оба предела существуют.

**3. Если функция является непрерывной в точке** $x = x_0$, то, применяя правила предельного перехода, получим, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ , т.е. вычисление предела сводится к подстановке предельного значения аргумента в функцию под знаком предела.

**4. Замечательные пределы**

**Первый замечательный предел.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

**Формы первого замечательного предела:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$.

**Второй замечательный предел.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

**5. Пределы, используемые часто.** Постоянная $a>0$.

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty} ax=\infty$. 5.2. $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{a}{x}=-\infty$. 5.3. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{a}{x}=+\infty$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{x}=\infty$. 5.5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{a}{x}=0$.

### Вариант задания по теме

Найти следующие пределы:

4.1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-11x+5}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x^2-3}{2+8x-2x^3}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

## Методические указания к решению заданного варианта

**4.1.** ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-11x+5}$.

*Решение*

Подставляя предельное значение аргумента $x=5$ в функцию под знаком предела, убеждаемся, что числитель и знаменатель дроби обращаются в 0, и мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Затем разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители. Знаменатель преобразуем, используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1, x_2$ – корни трехчлена.

Находим корни квадратного трехчлена:

$$2x^2-11x+5=0 \text{ и } x_1=5,\, x_2=0{,}5.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2x^2-11x+5}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+5)}{2(x-5)(x-0{,}5)}$.

Согласно определению предела функции аргумент $x$ стремится к своему предельному значению 5, но никогда с ним не совпадает, т.е. $x-5\neq 0$. Сокращаем числитель и знаменатель на ($x$ - 5) и в полученное выражение подставляем значение $x=5$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{2(x-5)(x-0{,}5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)}{2x-1}=\frac{10}{9}.$$

**4.2.** ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$.

*Решение*

Преобразуем числитель, разложив квадратный трехчлен на множители (корни $x_1=2,\, x_2=-3$), затем числитель и знаменатель дроби умножим на сумму ($\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}>0$) и после преобразований сократим дробь на $(x-2)\neq 0$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+3)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+7}\right)=5\cdot 6=30.$$

**4.3.** ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x^2-3}{2+8x-2x^3}$.

*Решение*

При условии $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, и мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на $x^3$ (наивысшая степень $x$):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-3}{2+8x-2x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{7x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+\frac{8x}{x^3}-\frac{2x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+\frac{8}{x^2}-2}=\frac{4}{-2}=-2,$$

так как при $x \to \infty$ функции $\frac{7}{x}, \frac{3}{x^3}, \frac{2}{x^3}, \frac{8}{x^2}$ стремятся к 0 (см. п. 5 справочного материала).

**4.4.** ***Найти предел*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$.

*Решение*

При подстановке значения аргумента $x = 0$ в функцию под знаком предела числитель и знаменатель дроби обращаются в 0, и мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

При нахождении предела используем:

1) формулу $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$;

2) первый замечательный предел в форме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)=2\cdot 3\cdot 3=18.$$

# 5. Производная

## Справочный материал

**1. Определение производной.** *Производной функции* $y = f(x)$ по аргументу $x$ называется

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta x$ – приращение аргумента, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращение функции.

**2. Правила дифференцирования.** Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции независимой переменной $x$, $c$ – постоянная, тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

**2.1.** $(c)' = 0$. **2.2.** $x' = 1$.

**2.3.** $(u \pm v)' = u' \pm v'$. **2.4.** $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

**2.5.** $(cu)' = c \cdot u'$. **2.6.** $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

**3. Производная сложной функции.** Если $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то $y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$.

**4. Таблица производных основных элементарных функций**

| Таблица производных $u = \varphi(x)$ | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ | 8 | $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$ |
| 2 | $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | 9 | $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$ |
| 3 | $(a^u)' = a^u (\ln a) \cdot u'$ | 10 | $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ |
| 4 | $(e^u)' = e^u \cdot u'$ | 11 | $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 5 | $(\cos u)' = (-\sin u) \cdot u'$ | 12 | $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 6 | $(\sin u)' = (\cos u) \cdot u'$ | 13 | $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ |
| 7 | $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ | 14 | $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ |

**Вариант задания по теме**

Найти производные следующих функций:

5.1. $y=\sqrt[3]{2x^2+4x-3}$. 5.2. $y=\dfrac{\cos 4x}{\sin x}$.

5.3. $y=\left(x^2+6\right)ctg^4 2x$. 5.4. $y=\left(2+e^{tgx}\right)^5$.

5.5. $y=\ln\sin 3x+\arccos 7x$. 5.6. $y=arctg\left(2^{x^2+4}\right)$.

## Методические указания к решению заданного варианта

**5.1. *Найти производную функции*** $y=\sqrt[3]{2x^2+4x-3}$**.**

*Решение*

При нахождении производной (дифференцировании) данной функции используем формулу 1 таблицы производных: $\left(u^n\right)'=n\left(u^{n-1}\right)\cdot u'$, где $u=\varphi(x)$, и правила дифференцирования:

$$y'=(\left(2x^2+4x-3\right)^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}\left(2x^2+4x-3\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(2x^2+4x-3\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2x^2+4x-3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2\left(x^2\right)'+4(x)'-(3)'\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(2x^2+4x-3\right)^2}}(4x+4)=$$

$$=\frac{4x+4}{3\sqrt[3]{\left(2x^2+4x-3\right)^2}}.$$

**5.2. *Найти производную функции*** $y=\dfrac{\cos 4x}{\sin x}$ **.**

*Решение*

При дифференцировании данной функции применяем:

1) правило **2.6** **(**производная дроби), т.е. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

2) формулы 5 и 6 таблицы производных.

Итак, $y'=\dfrac{(\cos 4x)'\cdot\sin x-(\cos 4x)\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=$

$$=\frac{-\sin 4x\cdot(4x)'\cdot\sin x-\cos 4x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-4\sin 4x\cdot\sin x-\cos 4x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

**5.3.** ***Найти производную функции*** $y = \left(x^2+6\right)ctg^4 2x$**.**

*Решение*

При нахождении производной данной функции используем:

1) правило **2.4 (**производная произведения**)**: $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$;

2) формулы 1 и 8 таблицы производных.

$$y' = \left(x^2+6\right)' \cdot ctg^4 2x + \left(x^2+6\right)\cdot (ctg^4 2x)' =$$
$$= 2x\cdot ctg^4 2x + \left(x^2+6\right)\cdot 4\,ctg^3 2x\cdot \left(ctg 2x\right)' =$$
$$= 2x\cdot ctg^4 2x + \left(x^2+6\right)\cdot 4\,ctg^3 2x\cdot \left(-\frac{2}{\sin^2 2x}\right) =$$
$$= 2x\cdot ctg^4 2x - \frac{8\left(x^2+6\right)\,ctg^3 2x}{\sin^2 2x}.$$

**5.4.** ***Найти производную функции*** $y = \left(2+e^{tgx}\right)^5$**.**

*Решение*

Дифференцируя данную функцию, применяем формулы 1, 4, 7 таблицы производных.

$$y' = 5\cdot\left(2+e^{tg\,x}\right)^4\left(2+e^{tg\,x}\right)' = 5\cdot\left(2+e^{tg\,x}\right)^4\left(e^{tg\,x}\right)' =$$
$$= 5\cdot\left(2+e^{tg\,x}\right)^4 e^{tg\,x}\left(tg\,x\right)' = 5\cdot\left(2+e^{tg\,x}\right)^4 e^{tg\,x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\left(2+e^{tg\,x}\right)^4 e^{tg\,x}}{\cos^2 x}.$$

**5.5.** ***Найти производную функции*** $y = \ln\sin 3x + \arccos 7x$**.**

*Решение*

При дифференцировании данной функции используем формулы 6, 10, 12 таблицы производных.

$$y' = \left(\ln\sin 3x\right)' + \left(\arccos 7x\right)' = \frac{\left(\sin 3x\right)'}{\sin 3x} - \frac{(7x)'}{\sqrt{1-(7x)^2}} =$$
$$\frac{3\cos 3x}{\sin 3x} - \frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}.$$

**5.6.** ***Найти производную функции*** $y = arctg\left(2^{x^2+4}\right)$**.**

*Решение*

Дифференцируя данную функцию, используем формулы 13 и 3 таблицы производных:

$$y' = \frac{\left(2^{x^2+4}\right)'}{1+\left(2^{x^2+4}\right)^2} = \frac{2^{x^2+4}\cdot\ln 2\cdot\left(x^2+4\right)'}{1+2^{2x^2+8}} = \frac{2^{x^2+4}\cdot\ln 2\cdot 2x}{1+2^{2x^2+8}}.$$

# 6. Исследование функций

## Справочный материал

**Асимптоты.** Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой к графику функции, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Прямая с уравнением $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции, если существуют пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) - kx \right).$$

**Достаточные условия монотонности (**возрастания, убывания**) функции.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале и ее производная $y' > 0$ ($y' < 0$) во всех внутренних точках интервала, то функция *возрастает* (*убывает*) на этом интервале.

**Точки экстремума (**максимума, минимума**).** Точка $x = x_0$ называется точкой *максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если для всех значений $x \neq x_0$, принадлежащих некоторой окрестности точки $x = x_0$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

**Достаточные условия экстремума.** Если при переходе аргумента $x$ непрерывной функции через точку $x_0$ (слева направо) производная $y'$ меняет знак с (+) на (-), то $x_0$ - точка максимума, если производная $y'$ меняет знак с (-) на (+), то $x_0$ - точка минимума.

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) только в тех точках, которые находятся в области определения $y = f(x)$ и где $y' = 0$ или не существует. Эти точки называются ***критическими***.

Интервалы возрастания и убывания функции определяются из условия, что их границами могут быть только точки экстремума, точки разрыва и границы области определения.

**Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба.** Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале ($a$; $b$), если она расположена *ниже* (*выше*) любой из касательных, проведенных к кривой на этом интервале.

Точки непрерывности кривой, отделяющие выпуклую часть от вогнутой части или наоборот, называются *точками перегиба*.

**Достаточные условия выпуклости, вогнутости.** Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некотором интервале и ее вторая производная $y'' < 0$ $(y'' > 0)$ во всех внутренних точках интервала, то кривая является *выпуклой* (*вогнутой*) на этом интервале.

Абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$ - значения аргумента $x$, при переходе через которые вторая производная $y''$ меняет знак.

Интервалы выпуклости, вогнутости графика функции определяются из условия, что их границами могут быть только точки перегиба, точки разрыва и границы области определения.

Исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей *схеме*:

1. Найти область определения функции и точки разрыва.
2. Исследовать четность, нечетность функции.
3. Найти асимптоты графика функции: вертикальные, наклонные.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
6. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
7. Построить график функции, используя полученные результаты исследования. Если их окажется недостаточно, то можно найти несколько дополнительных точек графика функции, исходя из ее уравнения.

**Вариант задания по теме**

Исследовать функции и построить их графики:

6.1. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

6.2. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

## Методические указания к решению заданного варианта

**6.1.** ***Исследовать функцию*** $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ ***и построить ее график***

*Решение*

1. Областью определения данной функции, как и всякого многочлена является вся числовая ось, т.е. $D(y) = (-\infty : +\infty)$. Функция всюду непрерывна, точек разрыва нет.

2. Для исследования четности или нечетности функции находим $y(-x)$:

$$y(-x) = -(-x)^3 + 6(-x)^2 - 9(-x) = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

Так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является четной и не является нечетной.

3. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой к графику функции, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Прямая с уравнением $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции, если существуют пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) - kx \right).$$

В нашем случае вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва.

Наклонных асимптот также нет, так как

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{x} = = \lim_{x \to \infty} \left(-x^2 + 6x - 9\right) = \infty \text{ не существует.}$$

4. Находим точки пересечения графика функции с осями координат:

а) с осью $Ox$ из условия $y = 0$, т.е. $-x^3 + 6x^2 - 9x = 0$,

$$-x\left(x^2 - 6x + 9\right) = -x\left(x - 3\right)^2 = 0 \text{ и } x_1 = 0, x_2 = 3.$$

б) с осью $Oy$ из условия $x = 0$, т.е. $y(0) = 0$.

Итак, точки пересечения с осями координат: (0; 0), (3; 0).

5. Возрастание функции в данном интервале характеризуется условием $y' > 0$, убывание – условием $y' < 0$.

Находим производную

$y' = \left(-x^3 + 6x^2 - 9x\right)' = -3x^2 + 12x - 9 = -3\left(x^2 - 4x + 3\right)$ и критические точки. Полагая $y' = 0$, получим, что $x^2 - 4x + 3 = 0$ и критические точки: $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

Область определения разбиваем критическими точками на интервалы и результаты исследования поместим в таблицу:

| Значения $x$ | $(-\infty;\ 1)$ | 1 | $(1;\ 3)$ | 3 | $(3;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Знак $y'$ | – | 0 | + | 0 | – |
| Поведение $y = f(x)$ | убывает $\searrow$ | min $y_{\min} = -4$ | возрастает $\nearrow$ | max $y_{\max} = 0$ | убывает $\searrow$ |

Знак $y'$ в интервалах находим, взяв значения $x$ из данного интервала:

– в интервале $(-\infty;\ 1)$ при $x = 0$ $y'(0) = -9 < 0$;

– в интервале $(1;\ 3)$ при $x = 2$ $y'(2) = +3 > 0$;

– в интервале $(3;\ +\infty)$ при $x = 4$ $y'(4) = -9 < 0$.

В точке $x = 1$ достигается минимум функции $y_{\min} = y(1) = -4$, в точке $x = 3$ достигается максимум функции $y_{\max} = y(3) = 0$.

6. Выпуклость графика функции в данном интервале характеризуется условием $y'' < 0$, вогнутость - условием $y'' > 0$.

Находим вторую производную функции и приравниваем ее к нулю:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(-3x^2 + 12x - 9\right)' = -6x + 12 = 0.$$

$y''$ обращается в нуль при значении $x = 2$, которое может быть абсциссой точки перегиба. Результаты исследования поместим в таблицу:

| Значения $x$ | $(-\infty;\ 2)$ | 2 | $(2;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Знак $y''$ | + | 0 | - |
| Поведение $y = f(x)$ | вогнута $\smile$ | точка перегиба | выпукла $\frown$ |

Определяем знак $y''$ в интервалах, взяв значения $x$ из данного интервала:

– в интервале $(-\infty;\ 2)$ при $x = 0$ $y''(0) = 12 > 0$;

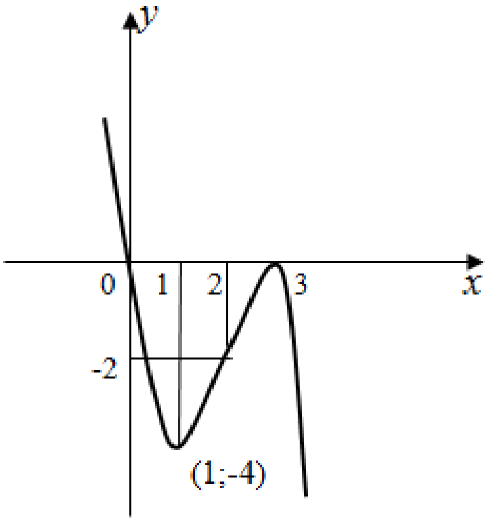
– в интервале $(2;\ +\infty)$ при $x = 3$ $y''(3) = -6 < 0$.

Вычислим $y(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 = -2$.

При переходе аргумента через точку $x = 2$ $y''$ меняет знак, следовательно, точка (2; - 2) является точкой перегиба графика функции.

7. Используя проведенное исследование, построим график функции

$$y = -x^3 + 6x^2 - 9x$$




**6.2.** ***Исследовать функцию*** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ ***и построить ее график***

*Решение*

1. Область определения данной функции $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \div\infty)$.
   $x$ = - 1 – точка разрыва.

2. Область определения функции не симметрична относительно начала координат и поэтому она не является ни четной, ни нечетной.

3. Так как $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$, то прямая $x$ = - 1 является вертикальной асимптотой.

   Для отыскания наклонной асимптоты $y = kx + b$ находим пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(x+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x^2}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{x+1} = -1.$$

   Таким образом, $y = x - 1$ – наклонная асимптота к графику функции.

4. Точки пересечения графика функции с осями координат:
   если $x = 0$, то $y = 0$ и график функции проходит через начало координат – $O$ (0; 0).

5. Находим интервалы монотонности, исследуем наличие точек экстремума.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0,$$

отсюда

$$x(x+2) = 0 \text{ и}$$

$x = 0, \quad x = -2$ - критические точки.

Область определения разбиваем критическими точками на интервалы и результаты исследования поместим в таблицу:

| Значения $x$ | $(-\infty;\ -2)$ | $-2$ | $(-2;\ -1)$ | $(-1;\ 0)$ | $0$ | $(0;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Знак $y'$ | - | 0 | + | - | 0 | - |
| Поведение $y = f(x)$ | возрастает ↗ | max $y_{max} =$ = - 4 | убывает ↘ | убывает ↘ | min $y_{min} =$ =0 | возрастает ↗ |

Знак $y'$ в интервалах находим, взяв значения $x$ из данного интервала:

– в интервале $(-\infty;\ -2)$ при $x = -3$ $y'(-3) > 0$;

– в интервале $(-2;\ -1)$ при $x = -1{,}5$ $y'(-1{,}5) < 0$;

– в интервале $(-1;\ 0)$ при $x = -0{,}5$ $y'(-0{,}5) < 0$;

– в интервале $(0;\ +\infty)$ при $x = 1$ $y'(1) > 0$.

В точке $x = -2$ достигается максимум функции, $y_{max} = y(-2) = -4$, в точке $x = 0$ достигается минимум функции, $y_{min} = y(0) = 0$.

6. Находим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0,$$

поэтому выпуклость и вогнутость графика функции рассмотрим на интервалах области определения.

| Значения $x$ | $(-\infty;\ -1)$ | $(-1;\ +\infty)$ |
|---|---|---|
| Знак $y''$ | - | + |
| Поведение $y = f(x)$ | выпукла ⌒ | вогнута ◡ |

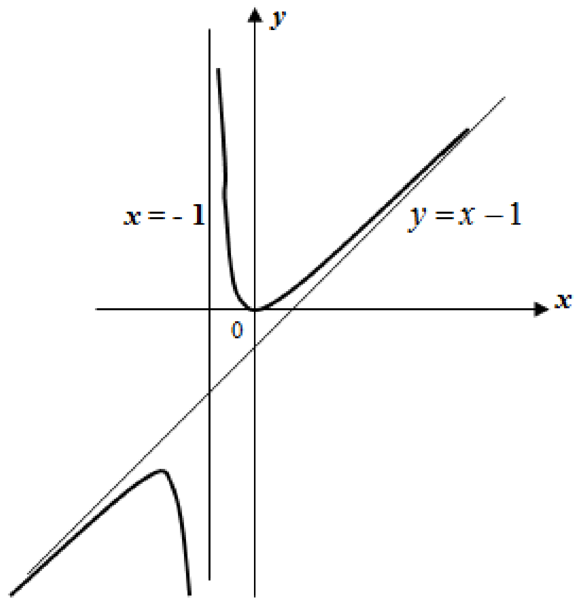
Определяем знак $y''$ в интервалах, взяв значения $x$ из данного интервала:

– в интервале $(-\infty;\ -1)$ при $x = -2$ $y''(-2) < 0$;

– в интервале $(-1;\ +\infty)$ при $x = 0$ $y''(0) > 0$.

Точек перегиба график функции не имеет.

7. Построим график функции, используя проведенное исследование.



# 7. Интегралы

## Справочный материал

### НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1. Определение неопределенного интеграла.** Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке $X$, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $X$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

где $F(x)$ – какая-либо первообразная для $f(x)$, а $C$ – произвольная постоянная.

**2. Свойства неопределенного интеграла:**

2.1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2.2. $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)\,dx$ ($k$ - постоянная).

2.3. $\int (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$.

**3. Таблица основных интегралов**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int dx = x + C$ | 8 | $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$ |
| 2 | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$ | 9 | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$ |
| 3 | $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ | 10 | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ |
| 4 | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ | 11 | $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$ |
| 5 | $\int e^x dx = e^x + C$ | 12 | $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ |
| 6 | $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ | 13 | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ |
| **7** | $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ | 14 | $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$ |

## 4. Основные методы интегрирования

***Метод непосредственного интегрирования*** – метод вычисления интеграла приведением к табличным интегралам с использованием тождественных преобразований подынтегрального выражения и свойств неопределенного интеграла.

***Метод замены переменной.*** Пусть справедлива формула:

$\int f(x)dx = F(x)+C$. Заменим переменную $x$ новой переменной $t$ по формуле $x=\varphi(t)$ ($x=\varphi(t)$ – дифференцируемая функция, имеющая обратную), тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

***Метод интегрирования по частям.*** Этот метод применим, если подынтегральное выражение можно представить в виде: $f(x)dx = u(x)v'(x)dx = u\,dv$ и тогда справедлива формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Использование метода целесообразно, если $\int v\,du$ является более простым, чем исходный интеграл.

Метод интегрирования по частям применяют к интегралам следующих типов ($P(x)$ – многочлен):

1. $\int P(x)\,e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$.

Здесь $u = P(x)$, и, соответственно интегралам:

$$dv = e^{ax}dx,\ dv = \sin ax\,dx,\ dv = \cos ax\,dx.$$

2. $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\,arctg\,x\,dx$.

Здесь за $u$ принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $dv = P(x)dx$.

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 1. Определение определенного интеграла

***Определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ ($n$ – число отрезков деления $[a;b]$ на частичные точками $x_i$; $c_i$ – произвольная точка из $[x_{i-1};x_i]$, $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$): $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$,

$a$ – нижний, $b$ – верхний пределы интегрирования.

## 2. Свойства определенного интеграла

2.1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

2.2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

2.3. $\int\limits_a^b c\cdot f(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, где $c$ – постоянная.

2.4. $\int\limits_a^b (f(x)+\varphi(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$

2.5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где точка $x=c$ может находиться как внутри, так и вне отрезка $[a;b]$.

2.6. $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ ($\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$), если $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) на отрезке $[a;b]$.

## 3. Правила вычисления определенных интегралов

***Формула Ньютона-Лейбница*:**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

***Замена переменной*:** $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$,

где $x=\varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе с производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

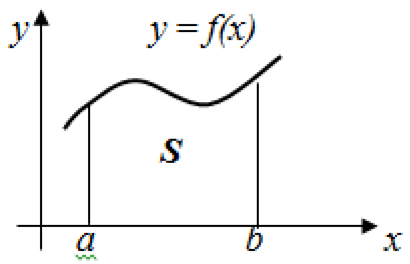
***Интегрирование по частям*:**

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

**4. Геометрический смысл определенного интеграла**

Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{S} = \int_a^b f(x)dx.$$




**Вариант задания по теме**

Найти неопределенные интегралы:

7.1. $\int\left(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right)\,dx$.

7.2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$.

7.3. $\int(x-5)\cos 2x\,dx$.

7.4. $\int\sin 2x\cdot\cos 5x\,dx$.

7.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y = -x^2 + 5x - 4$, $y = 0$.

## Методические указания к решению заданного варианта

**7.1. *Найти интеграл*** $\int\left(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right)\,dx$.

*Решение*

Используя свойства 2.2 и 2.3 неопределенного интеграла, получим $\int\left(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right)\,dx = 2\int x^3dx - 5\int x^2dx + 7\int xdx - 3\int dx$.

К первым трем интегралам применяем формулу 2 таблицы интегралов, к четвертому - формулу 1.

$$\int\left(2x^3-5x^2+7x-3\right)dx = 2\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}-3x+C =$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-3x+C\,.$$

**7.2.** ***Найти интеграл*** $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$.

*Решение*

Применяя метод замены переменной, сведем данный интеграл к табличному. Полагая $t = 3x - 4$, получим $dt = (3x - 4)'\,dx = 3\,dx$, $dx = \frac{dt}{3}$.

Затем используем формулу 2 таблицы интегралов.

Итак, $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \int\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{t}+C\,.$

Далее, возвращаясь к старой переменной, имеем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x-4}+C\,.$$

**7.3.** ***Найти интеграл*** $\int(x-5)\cos 2x\,dx$.

*Решение*

Здесь нужно применить метод интегрирования по частям с использованием формулы: $\int u\,dv = uv-\int v\,du$.

Полагая $u = x-5$ и $dv = \cos 2x\,dx$, получим $du = (x-5)'\,dx = dx$, $v = \int dv = \int\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$ (сделав замену переменной $t = 2x$ и $dt = {}$ $=2\,dx$) .

Находим $\int(x-5)\cos 2x\,dx = (x-5)\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx =$

$$=(x-5)\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\,.$$

**7.4. *Найти интеграл*** $\int \sin 2x \cdot \cos 5x\, dx$.

*Решение*

Преобразуем функцию под знаком интеграла, используя формулу тригонометрии: $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

Итак, $\int \sin 2x \cdot \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int[\sin 7x + \sin(-3x)]\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x\, dx -$

$$-\frac{1}{2}\int \sin 3x\, dx = -\frac{1}{2\cdot 7}\cos 7x + \frac{1}{2\cdot 3}\cos 3x + C =$$

$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Напомним другие формулы тригонометрии, позволяющие представить произведение тригонометрических функций в виде суммы:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Решение следующей задачи требует умения вычислять определенные интегралы.

***Пример***: вычислить $\int_1^2\left(3x^3 - 5x + \frac{7}{x}\right)dx$.

*Решение*

Используя свойства определенного интеграла, получим

$$\int_1^2\left(3x^3 - 5x + \frac{7}{x}\right)dx = 3\int_1^2 x^3dx - 5\int_1^2 x\,dx + 7\int_1^2\frac{dx}{x}.$$

Все интегралы – табличные. Применяя формулу ***Ньютона-Лейбница***

($\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, $F(x)$ – первообразная для $f(x)$**)**,

имеем**:**

$$\int_1^2\left(3x^3 - 5x + \frac{7}{x}\right)dx = 3\int_1^2 x^3dx - 5\int_1^2 x\,dx + 7\int_1^2\frac{dx}{x} =$$

$$= 3\,\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - 5\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 7\ln|x|\Big|_1^2 = \frac{3}{4}(16-1) - \frac{5}{2}(4-1) + 7(\ln 2 - \ln 1) = 3{,}75 + \ln 2.$$

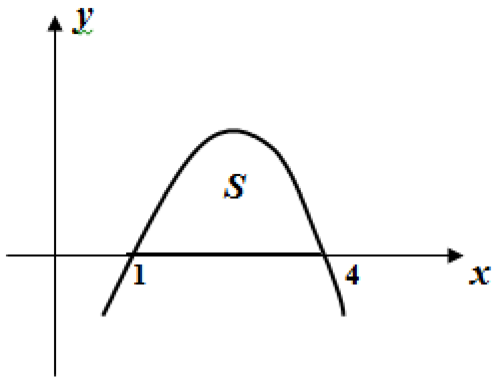
**7.5.** ***Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями***

$$y = -x^2 + 5x - 4, \; y = 0.$$

*Решение*

Приступая к решению, используем геометрический смысл определенного интеграла и строим фигуру, ограниченную заданными линиями: $y = -x^2 + 5x - 4$, $y = 0$. Находим точки пересечения этих линий: $y = -x^2 + 5x - 4 = 0$.

Решая квадратное уравнение, получим $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Фигура ограничена сверху параболой ($y = -x^2 + 5x - 4$), снизу осью $x$ ($y = 0$).




Площадь полученной фигуры

$$S = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_1^4 + \frac{5x^2}{2}\Big|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = \left(-\frac{64}{3} + \frac{1}{3}\right) + (40 - 2{,}5) - (16 - 4) = 4{,}5.$$

# 8. Дифференциальные уравнения

## Справочный материал

### 1. Основные понятия

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную $x$, искомую функцию $y$ и ее производные

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

или $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ – разрешенное относительно производной.

*Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

*Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$**,** которая при подстановке ее вместе со своими производными в уравнение, обращает его в тождество.

### 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

*Дифференциальное уравнение первого порядка* **-** уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \text{ или } y' = f(x, y).$$

Принимая во внимание, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$**,** уравнение можно представить в виде $dy = f(x, y)dx$.

*Общее решение* дифференциального уравнения первого порядка – это функция вида $y = \varphi(x, C)$ **(**$C$ – произвольная постоянная), удовлетворяющая условиям:

*а*) при любом значении $C$ является решением уравнения;

*б*) при любом начальном условии (допустимом) $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение $C = C_0$, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Общее решение, представленное в неявной форме $g(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом*

*Частное решение* (*интеграл*) получается из общего при конкретном значении произвольной постоянной $C$.

**2.1.** ***Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными*** имеет вид $f_1(x) f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0$, решается преобразованием его к виду $P(y)dy = Q(x)dx$ и почленным интегрированием этого равенства.

**2.2.** ***Однородное дифференциальное уравнение*** – дифференциальное уравнение, приводимое к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Подстановка $t = \frac{y}{x}$ или $y = t \cdot x$ ( $y' = t'x + t$ ) сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

**2.3.** ***Линейное дифференциальное уравнение*** – дифференциальное уравнение, приводимое к виду $y' + P(x)y = Q(x)$, решается с помощью подстановки: $y = u(x)\cdot v(x)$, $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Эта подстановка сводит решение уравнения к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

**Вариант задания по теме**

Решить дифференциальные уравнения:

8.1. $\left(\sqrt{y}+1\right)\sqrt{x}\cdot y' - y = 0$.

8.2. $2xy\,y' = \left(x^2 + y^2\right)$.

8.3. $y' + \frac{y}{x+1} = x^2$.

## Методические указания к решению заданного варианта

**8.1.** ***Решить дифференциальное уравнение*** $\left(\sqrt{y}+1\right)\sqrt{x}\cdot y' - y = 0$.

*Решение*

Выразим производную через дифференциалы переменных: $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\left(\sqrt{y}+1\right)\sqrt{x}\cdot\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Умножим обе части уравнения на $dx$, приводим его к виду $\left(\sqrt{y}+1\right)\sqrt{x}\cdot dy = y\,dx$ и устанавливаем, что это *уравнение с разделяющимися переменными*.

Далее разделяем переменные:

$$\frac{\sqrt{y}+1}{y}dy = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int\left(y^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{y}\right)dy=\int x^{-\frac{1}{2}}dx;\quad \int y^{-\frac{1}{2}}dy+\int\frac{dy}{y}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx;$$

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\ln|y|=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C;\quad 2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=C.$$

**8.2.** ***Решить дифференциальное уравнение*** $2xy\,y'=\left(x^2+y^2\right)$.

*Решение*

Выразим производную из уравнения: $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на $x^2$, получим

$$y'=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$$

и устанавливаем, что уравнение является о*днородным*.

Далее, полагая $y=t\cdot x$ и $y'=t'x+t$, преобразуем уравнение к виду

$$t'x+t=\frac{1+t^2}{2t};\quad t'x=\frac{1+t^2}{2t}-t;\quad t'x=\frac{1-t^2}{2t};$$

$$\frac{dt}{dx}x=\frac{1-t^2}{2t}$$ (*уравнение с разделяющимися переменными*).

Разделим переменные: $\dfrac{2t\,dt}{1-t^2}=\dfrac{dx}{x}$ и, интегрируя $\displaystyle\int\frac{2t\,dt}{1-t^2}=\int\frac{dx}{x}$, найдем

$$-\ln\left|1-t^2\right|=\ln|x|-\ln C\quad\left(\ln\left|1-t^2\right|+\ln|x|=\ln C\right)$$ или

$$x\left(1-t^2\right)=C.$$

Далее заменяя $t=\dfrac{y}{x}$, получим $x\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)=C$ и, окончательно, $x^2-y^2=Cx$.

**8.3.** ***Решить дифференциальное уравнение*** $y' + \frac{y}{x+1} = x^2$.

*Решение*

Данное дифференциальное уравнение является *линейным*, поэтому применяем подстановку $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x+1} = x^2 \text{ или } u'v + u\left(v' + \frac{v}{x+1}\right) = x^2.$$

Функцию $v = v(x)$ подберем так, чтобы она являлась решением уравнения $v' + \frac{v}{x+1} = 0.$

Тогда $u = u(x)$ – решение уравнения $u'v = x^2$ (*).

Решаем $v' + \frac{v}{x+1} = 0$ как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x+1} = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+1}.$$

Выполняя интегрирование $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x+1}$, и полагая $C$=0, получим

$$\ln|v| = -\ln|x+1| \text{ и } v = \frac{1}{x+1}.$$

Подставляя найденную функцию $v$ в уравнение (*), имеем $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x+1} = x^2$ (уравнение с разделяющимися переменными) или

$$du = \left(x^3 + x^2\right)dx.$$

В результате интегрирования последнего равенства функция

$$u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C\right)\frac{1}{x+1}.$$

# II. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

## Контрольные задания (1 семестр)

### Вариант 1

#### 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A-2B$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 6 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=-4,\\ 5x_1-7x_2+8x_3=-7.\end{cases}$

#### 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(1;-4;-3)$, $B(2;5;-4)$.

**2.2.** Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(1;5;0)$ $C(2;3;1)$. Найти вектор $2\vec{a}-\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(1;0;2)$ и $\vec{b}=(2;3;-1)$.

**2.4.** Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{2}$, $|\vec{a}|=0,5$, $|\vec{b}|=8$.

**2.5.** Найти площадь треугольника $ABC$, если $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$ и $C(6;2;0)$.

**2.6.** Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

#### 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы $CD$ треугольника $ABC$, если вершины имеют координаты: $A(-1; -1)$, $B(3; -1)$, $C(1; 3)$.

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; -1)$ параллельно прямой $2x - y - 3 = 0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(10;7)$ с центром в точке $C(2;1)$.

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2-6x+y^2+2y=6$.

# Вариант 2

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=2A-B$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2, \\ x_1-2x_2+x_3=1. \end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(1;0;-5)$, $B(-2;3;-4)$.

**2.2.** Даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, где $A(1;4;2)$, $B(4;-4;1)$, и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$. Найти вектор $2\vec{a}-2\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=0,5$, $|\vec{b}|=12$, и угол между ними $60^\circ$.

**2.4.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-5\vec{k}$.

**2.5.** Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1;-2;4)$, $B(3;0;1)$ и $\vec{b}=(1;0;3)$.

**2.6.** Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы $CD$ треугольника $ABC$, если вершины имеют координаты: $A$(-2; -1), $B$(8; 3), $C$(4; 3).

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A$(-2; -1), перпендикулярно прямой $x-2y+4=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A$(12; 5) с центром в точке $C$(4; -1).

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2-8x+y^2-2y=8$.

# Вариант 3

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -6\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^T-2A$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\ 2x_1-x_2-x_3=1,\\ x_1+3x_2+4x_3=6.\end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(-1;\,2;\,6)$, $B(-2;\,0;\,8)$.

**2.2.**Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(2;-4;1)$. Найти вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$ и $\vec{b}=(2;3;-1)$.

**2.4.** Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$.

**2.5.** Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=(1;0;3)$.

**2.6.** Найти объѐм параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы *CD* треугольника *ABC*, если вершины имеют координаты: *A*(1; -1), *B*(-3; -5), *C*(2; 6).

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку *A*(1; -1), параллельно прямой $2x-y+1=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку *A*(7;11) с центром в точке *C*(1;3).

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2+4x+y^2+6y=3$.

# Вариант 4

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B+2A$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ и его длину, если $M(6;-2;3)$, $N(3;-5;2)$.

**2.2.** Даны векторы $\vec{a}=\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;3;-1)$ $C(1;-1;0)$ Найти вектор $\vec{a}+\overrightarrow{2b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, и угол между ними $30^\circ$.

**2.4**. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(2;-4;1)$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$.

**2.5.** Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

**2.6.** Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}=3\bar{i}-3\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}-4\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{c}=2\bar{i}+2\bar{k}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы *CD* треугольника *ABC*, если вершины имеют координаты: *A*(-4; 4), *B*(0; 0), *C*(1; 5).

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку *A*(-4; 4), перпендикулярно прямой $3x + y + 5=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку *A*(2;6) с центром в точке *C*(-1;2).

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2-2x+y^2-6y=6$.

# Вариант 5

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=A+2B^T$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 5 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases}8x_1+3x_2-6x_3=2,\\ x_1+x_2-x_3=1,\\ -4x_1-x_2+3x_3=-2.\end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ и его длину, если $M(2;5;-4)$, $N(2;1;-7)$.

**2.2**. Даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, где $A(2;1;0)$, $B(4;-4;1)$, и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$. Найти вектор $\vec{a}-2\vec{b}$.

**2.3.** Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1;0;-2)$, $B(3;2;1)$ и $\vec{b}=(2;3;-1)$.

**2.4.** Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$.

**2.5.** Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

**2.6.** Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=-5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+5\vec{k}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы $CD$ треугольника $ABC$, если вершины имеют координаты: $A(10;\,-2)$, $B(0;\,-8)$, $C(0;\,-3)$.

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(7;\,-1)$, параллельно прямой $5x+y+1=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(4;2)$ с центром в точке $C(1;-2)$.

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2+2x+y^2-4y=4$.

# Вариант 6

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -4 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=3A+B$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ -3 & 4 & 2\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=2,\\ 5x_1+x_2+3x_3=14,\\ 2x_1+x_2+2x_3=5.\end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(0;5;-3)$, $B(2;\ 6;-4)$.

**2.2**. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(1;1;0)$ Найти вектор $2\vec{a}+\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, и угол между ними $45^\circ$.

**2.4.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(2;-1;0)$ и $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}$.

**2.5.** Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$.

**2.6.** Найти объѐм пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы *CD* треугольника *ABC*, если вершины имеют координаты: *A*(7; -1), *B*(3; 11), *C*(-5; 3).

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку *A*(-2; -13), перпендикулярно прямой $6x+y-2=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку *A*(7;2) с центром в точке *C*(3;-1).

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2-4x+y^2-2y=4$.

# Вариант 7

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B+2A$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(8;4;-1)$, $B(5;-1;-3)$.

**2.2.** Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;0;-1)$ $C(4;1;1)$. Найти вектор $3\vec{a}-\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}+3\bar{j}-6\bar{k}$.

**2.4.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$.

**2.5.** Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

**2.6.** Найти объѐм пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}=3\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=-3\bar{i}-4\bar{j}$, $\bar{c}=-\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы *CD* треугольника *ABC*, если вершины имеют координаты: *A*(-2; -13), *B*(4; -1), *C*(5; 4).

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку *A*(1; -9), параллельно прямой $4x+2y+10=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку *A*(2;6) с центром в точке *C*(-2;3).

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2+6x+y^2+2y=6$.

# Вариант 8

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^T+2A$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ -3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & -5\\ 3 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1-x_2+2x_3=-5,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2.\end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(9;0;-2)$, $B(7;-1;-5)$.

**2.2.** Даны векторы $\vec{a}=(3;1;-2)$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(2;-3;0)$. Найти вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$ и угол между ними $60^\circ$.

**2.4.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=(1;2;0)$.

**2.5.** Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

**2.6.** Найти объём пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\bar{b}=4\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\bar{j}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы $CD$ треугольника $ABC$, если вершины имеют координаты: $A(1;\ -9)$, $B(7;\ -1)$, $C(2;\ 8)$.

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(12;\ 0)$, перпендикулярно прямой $5x+y+3=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(11;6)$ с центром в точке $C(-1;1)$.

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2-8x+y^2+4y=5$.

# Вариант 9

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B^T+2A$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 2\\ 6 & -1 & 7\end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2,\\ x_1+5x_2-4x_3=-5,\\ 4x_1+x_2-3x_3=-4.\end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(5;-3;-4)$, $B(4;-1;2)$.

**2.2**. Даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, где $A(3;-2;0)$, $B(4;-4;1)$, и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. Найти вектор $\vec{a}+2\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-5\bar{j}+3\bar{k}$.

**2.4.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$.

**2.5.** Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(0;-1;5)$.

**2.6.** Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы $CD$ треугольника $ABC$, если вершины имеют координаты: $A(12; 0)$, $B(0; -10)$, $C(0; 4)$.

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-6; -3)$, параллельно прямой $x - y + 11=0$.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A(7;9)$ с центром в точке $C(2;-3)$.

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2-10x+y^2-2y=10$.

# Вариант 10

## 1. Линейная алгебра

**1.1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=B+A^T$.

**1.2.** Дано $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти матрицу $A\cdot B$.

**1.3.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}$.

**1.4.** Решить систему уравнений $\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1,\\ x_1-2x_2+4x_3=3,\\ 3x_1-x_2+5x_3=2.\end{cases}$

## 2. Векторная алгебра

**2.1.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если $A(-3;-2;1)$, $B(4;-6;2)$.

**2.2.** Даны векторы $\vec{a}=(-1;3;-1)$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $B(2;-3;-1)$ $C(2;-3;0)$. Найти вектор $2\vec{a}-\vec{b}$.

**2.3.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ и угол между ними $45^\circ$.

**2.4.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=(1;3;-1)$.

**2.5.** Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$.

**2.6.** Найти объѐм пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

## 3. Аналитическая геометрия

**3.1.** Найти уравнение медианы $CD$ треугольника $ABC$, если вершины имеют координаты: $A$(-6; -3), $B$(10; -1), $C$(11; -5).

**3.2**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A$(-6; -3), перпендикулярно прямой $6x$ -3$y$ +1 =0.

**3.3.** Указать уравнение окружности, которая проходит через точку $A$(11;8) с центром в точке $C$(-1;3).

**3.4.** Найти радиус окружности $x^2+10x+y^2+6y=2$.

# Контрольные задания (2 семестр)

## Вариант 1

### Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$ | б) | $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\cdot\sin 4x}$ |

### Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\sqrt[3]{x^4+5x^2}$ | б) | $y=\frac{1-tgx}{1+tgx}$ |
| в) | $y=sin^3 5x\cdot x$ | г) | $y=e^{2+ctgx}$ |
| д) | $y=arctg2x+\frac{1}{x}$ | е) | $y=\ln(cosx)$ |

### Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=x^3+x^2-8x+7$ | б) | $y=\dfrac{x^2}{x+3}$ |

### Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(6x-2)dx$ | б) | $\int\dfrac{dx}{3-4x}$ |
| в) | $\int\dfrac{xdx}{\cos^2 4x}$ | г) | $\int\sin 2x\cdot\cos 6x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=x+1,\quad x=0.$$

### Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\sqrt{y^2+1}=xyy'$ | б) | $y'-\dfrac{3y}{x+1}=(x+1)^4$ |

# Вариант 2

## Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$ | б) | $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\frac{x}{2}}{x^3-4x}$ |

## Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\sqrt{(4x-3)^3}$ | б) | $y=\frac{\sin 3x}{1+\cos x}$ |
| в) | $y=tg^3 5x\cdot x$ | г) | $y=(e^{ctgx}+5)^2$ |
| д) | $y=arcsin3x-3lnx$ | е) | $y=arctg(e^x)$ |

## Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=2x^3-3x^2$ | б) | $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$ |

## Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(7x-10)dx$ | б) | $\int\sqrt[4]{1-2x}dx$ |
| в) | $\int x\cdot sin\frac{x}{2}dx$ | г) | $\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=4x-x^2,\quad y=0.$$

## Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y'x^3=2y$ | б) | $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$ |

# Вариант 3

## Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$ | б) | $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^2-2x}$ |

## Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\sqrt[4]{(x^3+2)^3}$ | б) | $y=\frac{ctg4x+1}{lnx}$ |
| в) | $y=\sqrt{x}\cdot arcsin\frac{x}{2}$ | г) | $y=3^{cos^2x+1}$ |
| д) | $y=tg2x+\frac{4}{x-2}$ | е) | $y=sin(e^x)$ |

## Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$ | б) | $y=\dfrac{x^2}{x-4}$ |

## Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(2-3x^2)dx$ | б) | $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4-5x}}$ |
| в) | $\int x\cdot e^{3x}dx$ | г) | $\int \cos 4x\cdot\cos 8x\, dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\cos x\,,\quad y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}.$$

## Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $yy'+x=0$ | б) | $x^2y'=y(x+y)$ |

# Вариант 4

## Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$ | б) | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x-x^2}$ |

## Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\sqrt[3]{x^3-5}$ | б) | $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$ |
| в) | $y=\frac{1}{x}\cdot arcsin2x$ | г) | $y=2^{cos5x-1}$ |
| д) | $y=sin^5(3x+1)$ | е) | $y=arctg(lnx)$ |

## Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=2x^3-6x^2-18x+7$ | б) | $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ |

## Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(3x^2-2)dx$ | б) | $\int\dfrac{dx}{2-5x}$ |
| в) | $\int\dfrac{xdx}{\cos^2\frac{x}{3}}$ | г) | $\int\sin 7x\cdot\cos 3x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=2-x,\qquad x=0.$$

## Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $xyy'=x^2+1$ | б) | $y'=\dfrac{y}{x}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ |

# Вариант 5

## Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$ | б) | $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-x^3}{5x^2+3x-6}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x^2-x}$ |

## Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\frac{2}{\sqrt{x^3+4}}$ | б) | $y=\frac{ln\,x}{x^2+2\ln x}$ |
| в) | $y=x\cdot tg^3\frac{x}{2}$ | г) | $y=5^{sin2x+4}$ |
| д) | $y=arccos(3x-1)-\frac{1}{x^2}$ | е) | $y=\arcsin(e^x)$ |

## Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=x^4-2x^2+5$ | б) | $y=x+\dfrac{1}{x}$ |

## Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(2x-3x^3)dx$ | б) | $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{3+4x}}$ |
| в) | $\int x\cdot\sin 2x\,dx$ | г) | $\int\cos 4x\cdot\cos x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=2x-x^2,\quad y=0.$$

## Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $(x^2-1)y'-y=0$ | б) | $y'-2xy=xe^{x^2}$ |

## Вариант 6

### Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$ | б) | $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-2x+3}{3x^4+5x^2+1}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x^2-x}$ |

### Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\sqrt[3]{x^5+5x}$ | б) | $y=\frac{ctg2x-1}{x^2}$ |
| в) | $y=sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+1}$ | г) | $y=e^{\cos 4x-2}$ |
| д) | $y=arctg^3x-\ln 9x$ | е) | $y=\arccos(lnx)$ |

### Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=x^3-3x^2+6x-2$ | б) | $y=\dfrac{x^2-1}{x-2}$ |

### Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(4x^2-3)dx$ | б) | $\int\sqrt[3]{2+3x}dx$ |
| в) | $\int x\cdot\cos 4x\,dx$ | г) | $\int\sin 2x\cdot\sin 3x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\sin 2x,\quad y=0,\qquad x=0,\qquad x=\frac{\pi}{2}.$$

### Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $xy'-y=0$ | б) | $y'=cos^2\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$ |

# Вариант 7

## Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$ | б) | $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x^3+x^2}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$ | г) | $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg9x}{\sin 7x}$ |

## Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\frac{2}{x}-\sqrt{3x+x^2}$ | б) | $y=\frac{tg\frac{x}{2}}{sinx+1}$ |
| в) | $y=(1-ctg3x)\cdot e^{-x}$ | г) | $y=4^{\,ln2x+3}$ |
| д) | $y=\frac{3}{x^3}+cos^4\frac{x}{4}$ | е) | $y=\arcsin(lnx)$ |

## Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=x^3+6x^2+9x$ | б) | $y=\frac{x^2}{x-3}$ |

## Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(4x^5+3)dx$ | б) | $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ |
| в) | $\int x\cdot cos4x\,dx$ | г) | $\int\sin 5x\cdot\cos x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=4x,\quad x=4,\ y=0.$$

## Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $2y'\sqrt{x}-y=0$ | б) | $y'-\frac{y}{2x}=x^2$ |

# Вариант 8

## Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$ | б) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2+9}{8x^3+5x^2-2}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{x-x^2}$ |

## Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\frac{x^2}{4}-\sqrt{x^2-4x}$ | б) | $y=\frac{1+\cos x}{1-\sin 3x}$ |
| в) | $y=(x^3+7x)\cdot tg5x$ | г) | $y=e^{arcctg\frac{x}{3}}$ |
| д) | $y=\sqrt[3]{arcsin3x}$ | е) | $y=\ln(ctgx)$ |

## Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=x^4-8x^2+5$ | б) | $y=\dfrac{x^2}{x+4}$ |

## Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(3-x^2)dx$ | б) | $\int\sqrt[3]{5x+2}\,dx$ |
| в) | $\int\dfrac{xdx}{\sin^2\frac{x}{2}}$ | г) | $\int\sin 5x\cdot\sin 2x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{x^2}{4},\;\; x=4,\;\; y=0.$$

## Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\sqrt{1-y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$ | б) | $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$ |

## Вариант 9

### Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{x^2-4x+4}$ | б) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x^2}-2}{5x^3+x^2}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^5+7x^2+42}{x^4+15x-1}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg8x}{\sin 3x}$ |

### Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\sqrt{4x-x^3}+\frac{3x}{2}$ | б) | $y=\frac{ctg(4x-1)}{4x-1}$ |
| в) | $y=ln7x\cdot\sin(x^2+1)$ | г) | $y=7^{tg(x+4)-2}$ |
| д) | $y=arctg^3\frac{x}{3}$ | е) | $y=\cos(e^x)$ |

### Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2$ | б) | $y=x-\dfrac{1}{x}$ |

### Интегралы

1. Найти неопределѐнные интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(4x^5+7x^2)dx$ | б) | $\int\dfrac{dx}{8-3x}$ |
| в) | $\int x\cdot e^{\frac{x}{2}}dx$ | г) | $\int\cos 5x\cdot\cos x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{4}{x},\quad x=1,\quad y=0,\quad x=4.$$

### Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $x^2y'+y=0$ | б) | $y'-\dfrac{2y}{x}=\dfrac{3}{x^2}$ |

# Вариант 10

## Предел

Найти пределы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$ | б) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ |
| в) | $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$ | г) | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\frac{x}{3}}{tg\ 6x}$ |

## Производная

Найти производные следующих функций:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=\sqrt[4]{2-x^2}$ | б) | $y=\frac{x+\sqrt{x}}{\ln 4x}$ |
| в) | $y=(x^3+10x+5)\cdot tg\ 3x$ | г) | $y=e^{sin\left(\frac{x}{2}\right)+5}$ |
| д) | $y=cos^5 3x$ | е) | $y=arctg(2^x)$ |

## Исследование функций

Исследовать функции и построить их графики:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y=x^3-6x^2+9x+5$ | б) | $y=x+\dfrac{4}{x}$ |

## Интегралы

1. Найти неопределённые интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $\int(1+6x^2)dx$ | б) | $\int\dfrac{dx}{2x+3}$ |
| в) | $\int\dfrac{xdx}{\sin^2 4x}$ | г) | $\int \sin 6x\cdot\cos 4x\,dx$ |

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^3,\quad x=2,\quad y=0.$$

## Дифференциальные уравнения

Решить дифференциальные уравнения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) | $y'\cdot\sqrt{1+y^2}=\dfrac{x^2}{y}$ | б) | $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$ |

Учебное издание

***Вдовин*** *Андрей Юрьевич,*
***Демидова*** *Ирина Николаевна,*
***Золкина*** *Людмила Александровна*
*и др.*

# МАТЕМАТИКА

## ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПЕРВЫХ КУРСОВ УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЛЕСОТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISBN 978-5-94984-779-4

9 785949 847794

Редактор Р. В. Сайгина
Оператор компьютерной верстки О. А. Казанцева

Подписано в печать 12.03.2021
Формат 60x84/16
Уч.-изд. л. 4,4 Усл. печ. л. 4,42
Тираж 300 экз. (1-й завод 35 экз.)
Заказ № 7078.

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет»
620100, Екатеринбург, Сибирский тракт, 37
Редакционно-издательский отдел. Тел.: 8(343)221-21-44

Типография ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР УПИ»
620062, РФ, Свердловская область, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
Тел.: 8(343)362-91-16